

Esercizi - Equazioni differenziali

Esercizio 1. Determinare la soluzione generale delle seguenti equazioni differenziali:

- | | |
|---|------------------------------------|
| a) $y' = 2y - 3$. | i) $y' = e^{-2y} \sin x$. |
| b) $y' + \frac{y}{x} = 3x^4$, con $x \in (0, +\infty)$. | j) $y' = (1 + y^2)\sqrt{2x + 1}$. |
| c) $y' = 2xy - x^3$. | k) $4y'' + 4y' + y = 0$. |
| d) $e^x y' = y$. | l) $y'' - 4y = 3x - 4$. |
| e) $y' = -y + 6x + 1$ | m) $y'' - 5y' + 6y = 6x - 5$. |
| f) $y' + 2y = \cos(4x)$. | n) $y'' - 6y' + 10y = 5x - 1$ |
| g) $y' = 5y + 3e^{\frac{x}{2}}$. | o) $y'' + 25y = 5e^{5x}$ |
| h) $y' = 3y - 2xe^{3x}$. | p) $3y'' + 2y' - y = x^2$ |
| | q) $y'' = 6y' - 13y + xe^x$. |

Esercizio 2. Risolvere i seguenti problemi di Cauchy:

- a) $y'' = \sin(3x)$, $y(0) = 1$, $y'(0) = -2$.
- b) $y' = xy^2$, $y(0) = 1$.
- c) $(4x + 3)^2 y' = y$, $y(-1) = e$.
- d) $y' + (y - 2)^3 = 0$, $y(0) = 1$.
- e) $(2x - 1)y' + y = 2$, $y(1) = -1$.
- f) $y'' - 4y = 8$, $y(0) = y'(0) = 0$.
- g) $y'' - 2y' + 10y = 0$, $y(0) = 1$, $y'(0) = -4$.
- h) $2y'' - 7y' + 3y = x$, $y(0) = 0$, $y'(0) = 3$.
- i) $y' = \frac{e^{3x}}{y^3}$, $y(0) = -1$.
- j) $y' = \frac{3y-2}{4+x^2}$, $y(2) = \frac{1}{3}$.

Esercizio 3. Si consideri l'equazione differenziale

$$9y'' + 6y' + y = x^2 + 10x.$$

1. Determinare la soluzione generale dell'equazione.
2. Determinare la soluzione che soddisfa $y(0) = 0$, $y'(0) = 4$.
3. Stabilire se esistono soluzioni dell'equazione inferiormente limitate in $\mathbb{R}$.

Risultati

Esercizio 1.

a) $y(x) = \frac{3}{2} + Ce^{2x}$.

b) $y(x) = \frac{1}{2}x^5 + \frac{C}{x}$.

c) $y(x) = \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{2} + Ce^{x^2}$.

d) $y(x) = Ce^{-e^{-x}}$.

e) $y(x) = 6x - 5 + Ce^{-x}$

f) $y(x) = \frac{1}{10} \cos 4x + \frac{1}{5} \sin 4x + Ce^{-2x}$.

g) $y(x) = -\frac{2}{3}e^{\frac{x}{2}} + Ce^{5x}$.

h) $y(x) = -x^2e^{3x} + Ce^{3x}$.

i) $y(x) = \frac{1}{2} \log(2C - 2 \cos x)$.

j) $y(x) = \tan \left(C + \frac{1}{3}(2x + 1)^{\frac{2}{3}} \right)$.

k) $y(x) = C_1e^{-\frac{x}{2}} + C_2xe^{-\frac{x}{2}}$.

l) $y(x) = 1 - \frac{3}{4}x + C_1e^{2x} + C_2e^{-2x}$.

m) $y(x) = x + C_1e^{3x} + C_2e^{2x}$.

n) $y(x) = \frac{1}{2}x + \frac{1}{5} + C_1e^{3x} \cos x + C_2e^{3x} \sin x$.

o) $y(x) = \frac{1}{10}e^{5x} + C_1 \cos 5x + \sin 5x$.

p) $y(x) = -x^2 - 4x - 14 + C_1e^{\frac{x}{3}} + C_2e^{-x}$.

q) $y(x) = \frac{1}{8}xe^x + \frac{1}{16}e^x + C_1e^{3x} \cos(2x) + C_2e^{3x} \sin(2x)$

Esercizio 2.

a) $y(x) = 1 - \frac{5}{3}x - \frac{1}{9} \sin 3x$.

b) $y(x) = \frac{2}{2 - x^2}$.

c) $y(x) = e^{\frac{3}{4} - \frac{1}{4(4x+3)}}$.

$$\text{d) } y(x) = 2 - \frac{1}{\sqrt{2x+1}}.$$

$$\text{e) } y(x) = 2 - \frac{3}{\sqrt{2x-1}}.$$

$$\text{f) } y(x) = -2 + e^{2x} + e^{-2x}.$$

$$\text{g) } y(x) = e^x \cos 3x - \frac{5}{3} e^x \sin 3x$$

$$\text{h) } y(x) = \frac{7}{9} + \frac{x}{3} + \frac{11}{9} e^{3x} - 2e^{\frac{x}{2}}.$$

$$\text{i) } y(x) = -\sqrt[4]{\frac{4e^{3x}-1}{3}}.$$

$$\text{j) } y(x) = \frac{2}{3} - \frac{1}{3} e^{\frac{3}{2} \arctan \frac{x}{2} - \frac{3}{8} \pi}.$$

Esercizio 3. 1. $y(x) = x^2 - 2x - 6 + C_1 e^{-\frac{x}{3}} + C_2 x e^{-\frac{x}{3}}$

2. $y(x) = x^2 - 2x - 6 + 6e^{-\frac{x}{3}} + 8xe^{-\frac{x}{3}}$

3. $y(x) = x^2 - 2x - 6 + C_1 e^{-\frac{x}{3}} + C_2 x e^{-\frac{x}{3}}$ con $C_2 < 0$ oppure $C_2 = 0$ e $C_1 \geq 0$.